Tensoren
- eine kurze Erklärung -

Konrad Völkel

14. Juni 2009

Das Problem am Begriff **Tensor** ist, dass damit vielerlei gemeint sein kann und diese, zunächst verschiedenen, Begriffe in einem engen Zusammenhang stehen, der ihre Verwechslung vorprogrammiert. Ziel dieses Textes ist, ein bisschen von dieser Verwirrung zu nehmen, indem klare, mathematisch präzise, Definitionen gegeben werden.

Diese Objekte werden (mehr oder weniger korrekt) "Tensoren" oder "Tensorprodukte" genannt: $V \otimes_{\mathbb{R}} W$ mit V, W rellen Vektorräumen, $v \otimes w$ mit $v \in V,\ w \in W$, T_i^j mit T^j Linearform für jedes j und T_i Vektor für jedes i, also T_i^j Matrix. Es gibt noch mehr Beispiele, etwa jede relle oder komplexe Zahl, jeder Vektor, die Determinantenabbildung, etc. Wir wollen an dieser Stelle die (absichtliche) Verwirrung beenden und uns den Definitionen zuwenden.

Tensoren über einer Gruppe

Definition 1. Sei G eine Gruppe. Ein **Tensor** n-ter Stufe über G von Dimension $d_1 \times \cdots \times d_n$ ist eine Abbildung $\{1, ..., d_1\} \times \cdots \times \{1, .., d_n\} \to G$. Wenn a ein Tensor n-ter Stufe über G ist, so schreiben wir auch $a_{i_1, \cdots, i_n} := a(i_1, .., i_n)$ und nennen dies die $i_1, .., i_n$-te **Komponente** von a. Die Indizes i_k variieren also in den Zahlen $\{1, .., d_k\}$. Der Tensor a ist also bestimmt durch $d_1 \cdot d_2 \cdots d_n$ Elemente aus G.

Ein Tensor 0-ter Stufe ist einfach eine Abbildung $\{1\} \to G$, also ein Element aus G, man nennt daher Tensoren 0-ter Stufe auch **Skalare**. (Beachte: nach Konvention ist $\{1\}^0 = \{1\}$ und ein Tensor 0-ter Stufe ist dasselbe wie ein Tensor n-ter Stufe von Dimension $1 \times 1 \times \cdots \times 1$).

Ein Tensor 1-ter Stufe von Dimension d ist eine Abbildung $\{1, .., d\} \to G$, also d verschiedene Elemente aus G, man nennt Tensoren 1-ter Stufe auch **d-Tupel** und schreibt $a = (a_1, .., a_d)^\top$. Dabei heißt das Zeichen $\top$ **transponieren**, also

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{d_1} \end{pmatrix}$$

Ein Tensor 2-ter Stufe von Dimension $d_1 \times d_2$ ist eine Abbildung $\{1, .., d_1\} \times \{1, .., d_2\} \to G$, man schreibt auch

$$a = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1d_2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d_1 1} & \cdots & a_{d_1 d_2} \end{pmatrix}$$

und nennt a eine **Matrix**, der Plural lautet **Matrizen**.

Wollte man einen Tensor 3-ter Stufe analog notieren, so bräuchte man eine dritte Dimension auf dem Papier, denn ein Tensor n-ter Stufe von Dimension $d_1 \times \cdots \times d_n$ ist ja nichts als d_n verschiedene Tensoren $n-1$-ter Stufe von Dimension $d_1 \times \cdots \times d_{n-1}$.

Bemerkung 1. Die letzte Bemerkung, dass eine Abbildung $(\{1,..,d_1\} \times \cdots \times \{1,..,d_{n-1}\}) \times \{1,..,d_n\} \to G$ dasselbe ist, wie d_n Abbildungen $\{1,..,d_1\} \times \cdots \times \{1,..,d_{n-1}\} \to G$ ist aufzufassen als Korollar der allgemeinen Adjunktion von Mengen:

$$Hom(A \times B, C) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(A, \mathrm{Hom}(B, C))$$

und wer mit dieser Bemerkung nichts anfangen kann, sollte sie zunächst einfach ignorieren.

Beispiel 1. Wählen wir als Gruppe die rellen Zahlen $\mathbb{R}$ mit der Addition als Verknüpfung, so ist ein Tensor 1-ter Stufe von Dimension 3 nichts anderes als ein Punkt im Anschauungsraum $\mathbb{R}^3$.

Ein Tensor a von Dimension $1 \times d$ ist ein d-Tupel, das als Zeile notiert wird: $a = (a_{11}, a_{12}, .., a_{1d})$. Es wird gelegentlich auf Indizes verzichtet, die nur von Dimension 1 sind. Man schreibt also $a = (a_1, ..., a_d)$. Es ist aber wichtig, zu beachten, dass dies etwas anderes als $(a_1, ..., a_d)^\top$ ist!

Definition 2. Sei wieder G eine Gruppe. Sind a und b zwei Tensoren gleicher Stufe n und gleicher Dimensionen $d_1 \times \cdots \times d_n$, so ist die Summe $a + b$ definiert als der Tensor $(a+b) : \{1,...,d_1\} \times \cdots \times \{1,..,d_n\} \to G$ mit den Komponenten $(a+b)(i_1,..,i_n) := a_{i_1,..,i_n} \circ b_{i_1,..,i_n}$, wobei das hier verwendete $\circ$ die Verknüpfung der Gruppe G bezeichnen soll. Diese Definition heißt auch **komponentenweise Verknüpfung**.

Sind a und b Skalare, also Tensoren 0-ter Stufe, so reduziert sich diese Definition auf $(a+b) = a \circ b$.

Sind a und b d-Tupel, also Tensoren 1-ter Stufe von Dimension d, so vereinfach sich die Definition als $(a+b)_i = (a_i + b_i)_i$.

Beispiel 2. Wählen wir wieder die reellen Zahlen mit der Addition als Verknüpfung und betrachten wir die 3-Tupel $a = (1,2,3)^\top$ und $b = (2,2,3)^\top$, so erhalten wir $(a+b) = (1+2, 2+2, 3+3)^\top = (3,4,6)^\top$.

Lemma 1. *Die Menge aller Tensoren von Dimension $d_1 \times \cdots \times d_n$ über einer Gruppe G bilden mit der komponentenweise Verknüpfung von Tensoren eine neue Gruppe $T(d_1 \times \cdots \times d_n; G)$.*

Dabei ist insbesondere die Menge der Tensoren 0-ter Stufe wieder die Gruppe G.

Die Menge der Tensoren 1-ter Stufe von Dimension d bildet eine Gruppe $T(d; G)$, die als Gruppe isomorph ist zu $\bigoplus_{i=1}^d G$.

Allgemein ist $T(d_1 \times \cdots \times d_n; G) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i_1=1}^{d_1} \cdots \bigoplus_{i_n=1}^{d_n} G \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i=1}^{d_1 \cdots d_n} G = G^{d_1 \cdots d_n}$. Das ist nur eine Neuformulierung der oben formulierten Tatsache, dass ein Tensor n-ter Stufe bestimmt ist durch d_n Tensoren $n-1$-ter Stufe und damit durch seine $d_1 \cdots d_n$ Komponenten.

Beispiel 3. Die $d_1 \times d_2$-Matrizen über G bilden eine Gruppe, die isomorph ist zu $G^{d_1} \oplus G^{d_2}$, also zu $G^{d_1 \cdot d_2}$. Man schreibt auch $G^{d_1 \times d_2} := \mathrm{Mat}(d_1 \times d_2; G) := T(d_1 \times d_2; G)$;

Definition 3. Nun betrachten wir Tensoren über einem Ring R anstelle einer Gruppe G. Dadurch können wir eine **Multiplikation** von Tensoren erklären.

Man multipliziert einen Tensor 0-ter Stufe mit jedem anderen Tensor komponentenweise.

Ein Tensor 1-ter Stufe a von Dimension d kann rechts an einen Tensor 2-ter Stufe b von Dimension $1 \times d$ multipliziert werden, das Ergebnis ist ein Tensor 1-ter Stufe von Dimension 1:

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix}, \; b = (b_{11}, .., b_{1d}), \qquad b \cdot a := (a_1 \cdot b_{11} + a_2 \cdot b_{12} + \cdots + a_d \cdot b_{1d})$$

Man nennt diesen Spezialfall auch das **Skalarprodukt** der Tensoren von Stufe 1 $(a_1, .., a_d)^\top$ und $(b_1, .., b_d)^\top$, denn ein Tensor 1-ter Stufe von Dimension 1 kann identifiziert werden mit einem Tensor 0-ter Stufe, also einem Skalar.

Ein Tensor 1-ter Stufe a von Dimension d kann links an einen Tensor 2-ter Stufe b von Dimension $1 \times d$ multipliziert werden, das Ergebnis ist ein Tensor 2-ter Stufe von Dimension $d \times d$:

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix}, \; b = (b_{11}, .., b_{1d}), \qquad a \cdot b := \begin{pmatrix} a_1 \cdot b_{11} & a_1 \cdot b_{12} & \cdots & a_1 \cdot b_{1d} \\ a_2 \cdot b_{11} & \ddots & & a_2 \cdot b_{1d} \\ \ldots & & \ddots & \ldots \\ a_d b_{11} & \cdots & \cdots & a_d b_{1d} \end{pmatrix}$$

Man nennt diesen Spezialfall auch das **dyadische Produkt** der Tensoren von Stufe 1 $(a_1, .., a_d)^\top$ und $(b_1, .., b_d)^\top$.

Allgemein ist das Produkt von Tensoren als eine Kombination dieser Definitionen gegeben: Sei a ein Tensor von Dimension $d_1 \times d_2$ und b ein Tensor von Dimension $d_2 \times d_3$. Dann ist $a \cdot b$ ein Tensor von Stufe $d_1 \times d_3$, der definiert ist als

$$(a \cdot b)_{i_1, i_3} := \sum_{i_2=1}^{d_2} a_{i_1 i_2} \cdot b_{i_2 i_3}$$

Die Merkregel dazu lautet **Zeile mal Spalte**.

Man beachte, dass in umgekehrter Multiplikationsreihenfolge $b \cdot a$ ein Tensor von Stufe 4 von Dimension $d_2 \times d_3 \times d_1 \times d_2$ ist.

Bemerkung. Es ist legitim zu fragen, ob bei einer Multiplikation eines $d_1 \times d_2 \times d_2$-Tensors mit einem $d_2 \times d_2 \times d_3$-Tensors nun ein $d_1 \times d_3$-Tensor oder ein $d_1 \times d_2 \times d_2 \times d_3$-Tensor herauskommt. Nach unserer Konvention ist letzteres der Fall, wollte man einen $d_1 \times d_3$-Tensor erhalten, so müsste man in der Notation von $d_1 \times (d_2 \times d_2)$- bzw. $(d_2 \times d_2) \times d_3$-Tensoren sprechen. Dieses "Problem" löst man auch eleganter, indem man von **kovarianten und kontravarianten** Tensoren spricht, was wir hier noch nicht getan haben (was aber in der Physik meistens der Fall ist).

Bemerkung. Es ist wichtig, diese Definition von Tensoren mit ihrer Addition und Multiplikation nicht zu verwechseln mit dem **Tensorprodukt von Gruppen** bzw. von Ringen, Vektorräumen, etc. sowie den **Elementen eines Tensorproduktes von Gruppen**. Das Symbol $\otimes$ bezeichnet hierbei eine formale Komposition von Elementen eines Tensorprodukts, nicht jedoch eine Rechenvorschrift wie die hier erklärte Multiplikation von Tensoren!

Allerdings gibt es einen Zusammenhang, nämlich der, dass ein hier besprochener Tensor ein Element eines Tensorraums in Koordinaten darstellt.